Concurrencia y Colinealidad

Muchas de las propiedades importantes de las figuras geométricas, dependen de la concurrencia de líneas y de la colinealidad de puntos. Dos teoremas, elegantes por su poder y simplicidad, que son útiles en el establecimiento de tales propiedades, se darán a conocer en esta sección. Uno debe su nombre a un trabajo escrito por Menelao de Alejandría cerca del final de primer siglo d.C. El otro fue publicado por el matemático italiano Ceva en 1678.

Cada uno de estos teoremas se refiere a puntos en los lados de un triángulo, vistos los lados como líneas completas determinadas por pares de vértices del triángulo.

Teorema de Ceva

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1\,.$$

La relación anterior usa segmentos dirigidos. Esta relación es fácil de recordar si recorremos el perímetro del triángulo en un sentido. El primer segmento es el determinado por el vértice de partida al punto de división que se encuentra sobre el lado en el que nos estamos moviendo, el segundo segmento es el que va desde este último punto al segundo vértice, y así sucesivamente, hasta retornar al vértice de partida.

Demostración.

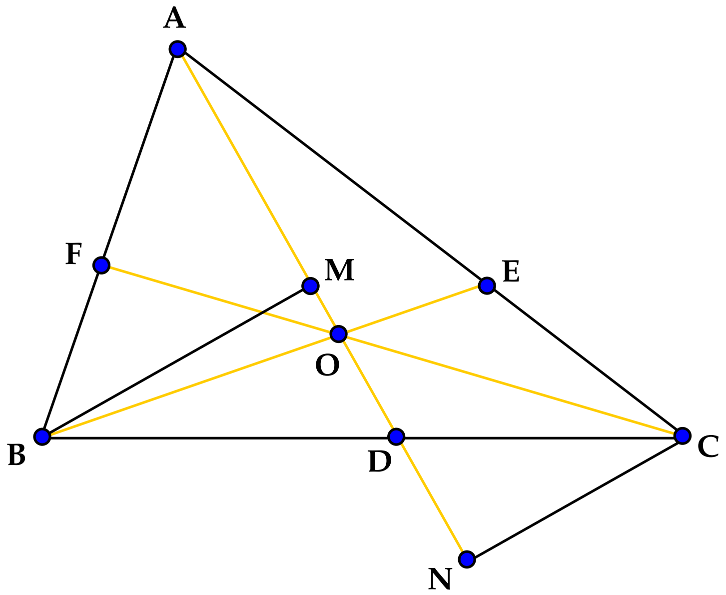
Primero supondremos que las rectas *AD, BE* y *CF* son concurrentes en un punto *O*.

Notemos que los triángulos *ABO* y *ACO* comparten la misma base *AO*, por lo tanto, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus alturas desde *B* y *C*, respectivamente.

Esto es:

$$\frac{(AOB)}{(AOC)}=\frac{BM}{CN}\,,$$

pero los triángulos BOM y CON son semejantes pues tienen un ángulo recto y comparten el ángulo en O al ser opuestos por el vértice. Entonces también tenemos que $\frac{BM}{CN}=\frac{BD}{DC}$. Y entonces obtenemos la relación $\frac{(AOB)}{(AOC)}=\frac{BD}{DC}$.



De la misma forma obtenemos las relaciones $\frac{(AOC)}{(BOC)}=\frac{AF}{FB}$ y $\frac{(BOC)}{(AOB)}=\frac{CE}{EA}$.

Multiplicando estas tres relaciones obtenemos que:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{(AOC)}{(BOC)}\cdot\frac{(AOB)}{(AOC)}\cdot\frac{(BOC)}{(AOB)}=1,$$

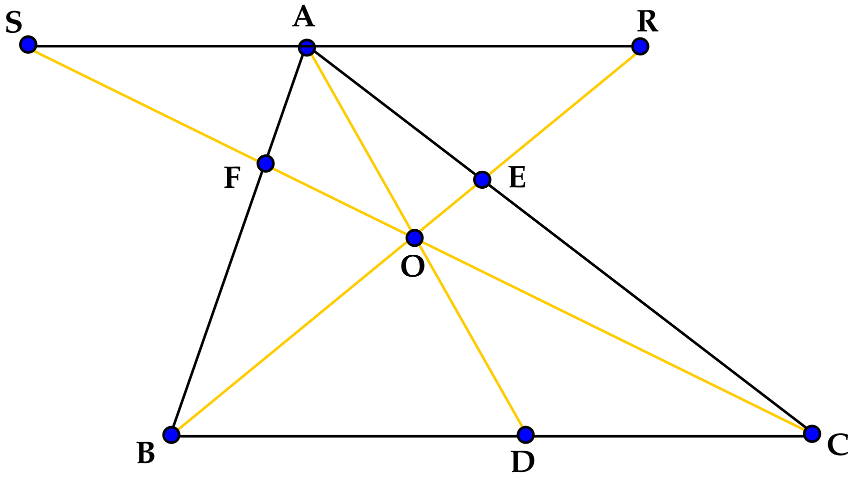
como queríamos probar.

Otra forma de ver este resultado, es trazar una paralela al lado BC por el vértice A y prolongar las rectas BO y CO hasta cortar dicha paralela en los puntos R y S, respectivamente. Entonces es fácil observar que hay triángulos semejantes y tenemos las siguientes relaciones:

$$\Delta AFS \approx \Delta BFC \Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AS}{BC} \qquad (1)$$

$$\Delta BOC \approx \Delta ROS \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AR}{AS} \qquad (2)$$

$$\Delta BEC \approx \Delta ARE \Rightarrow \frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AR} \qquad (3)$$



Multiplicando (1), (2) y (3) obtenemos el resultado.

Para ver el recíproco del teorema de Ceva, consideremos tres puntos *D*, *E* y *F* sobre los lados del triángulo *ABC*, como se muestra en la figura, y tales que:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1\,.$$

Sea *O* el punto de intersección de *BE* y *CF*. Hagamos que la recta *AO* corte al lado *BC* en un punto *D′*. Entonces como *AD′*, *BE* y *CF* son concurrentes, por el teorema de Ceva tenemos que:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{EA}=1=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA},$$

por lo que se cumple que:

$$\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$$
$$\frac{BC-D'C}{D'C}=\frac{BC-DC}{DC}$$
$$\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}$$
$$DC=D'C$$

Luego, al final, los puntos *D* y *D′* coinciden, por lo que *AD*, *BE* y *CF* son concurrentes.

Forma Trigonométrica del Teorema de Ceva

Aplicando el teorema generalizado de la Bisectriz al triángulo ABC obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{AF}{FB}=\frac{CA\,\mathrm{sen}\,ACF}{BC\,\mathrm{sen}\,FCB},\ \frac{BD}{DC}=\frac{AB\,\mathrm{sen}\,BAD}{AC\,\mathrm{sen}\,DAC}\ \text{y}\ \frac{CE}{EA}=\frac{BC\,\mathrm{sen}\,CBE}{AB\,\mathrm{sen}\,EBA}$$

Multiplicando estas tres relaciones obtenemos que:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{\mathrm{sen}\,ACF}{\mathrm{sen}\,FCB}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,BAD}{\mathrm{sen}\,DAC}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,CBE}{\mathrm{sen}\,EBA}.$$

Luego, las rectas AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{\mathrm{sen}\,ACF}{\mathrm{sen}\,FCB}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,BAD}{\mathrm{sen}\,DAC}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,CBE}{\mathrm{sen}\,EBA}=1.$$

Teorema de Menelao

Dado un triángulo ABC, sean D, E y F puntos sobre los lados (o sus prolongaciones) BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E y F son colineales si y sólo si

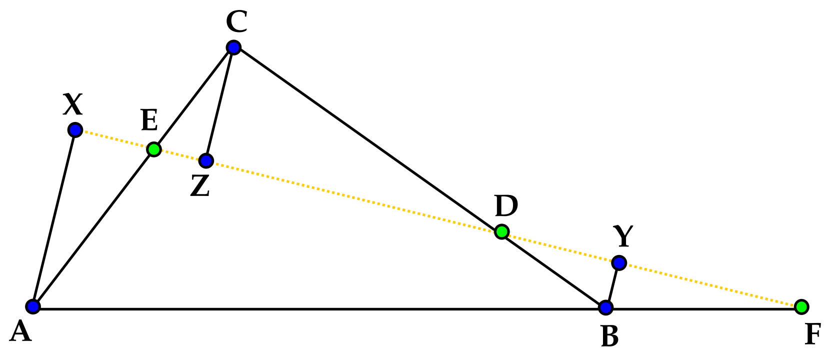
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Si en la relación anterior usamos segmentos dirigidos, obtendremos que

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1.$$

Demostración.

Supongamos primero que los puntos D, E y F son colineales. Entonces tracemos las proyecciones X, Y, Z desde los vértices A, B, C, respectivamente, a la recta DEF.



Notemos lo siguiente:

Los triángulos *AFX* y *BFY* son semejantes, por lo tanto $\frac{AF}{FB} = \frac{AX}{BY}$.
Los triángulos *BDY* y *CDZ* son semejantes, por lo tanto $\frac{BD}{DC} = \frac{BY}{CZ}$.
Los triángulos *CEZ* y *AEX* son semejantes, por lo tanto $\frac{CE}{EA} = \frac{CZ}{AX}$.

Multiplicando estas últimas tres relaciones obtenemos que:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AX}{BY} \cdot \frac{BY}{CZ} \cdot \frac{CZ}{AX} = 1 .$$

Para demostrar el inverso del teorema procedemos como en el teorema de Ceva. Supongamos que la recta *DE* corta en un punto *F′* al lado *AB*. Entonces, como *D, E* y *F′* son colineales tenemos que

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} .$$

Por lo que $\frac{AF'}{F'B} = \frac{AF}{FB}$, es decir, los puntos *F* y *F′* coinciden, por lo que *D, E* y *F* son colineales.

Forma Trigonométrica del Teorema de Menelao

La idea es la misma que en el teorema de Ceva Trigonométrico. Se tiene que los puntos *D, E* y *F* son colineales si y sólo si:

$$\frac{\operatorname{sen} ACF}{\operatorname{sen} FCB} \cdot \frac{\operatorname{sen} BAD}{\operatorname{sen} DAC} \cdot \frac{\operatorname{sen} CBE}{\operatorname{sen} EBA} = 1 .$$

(Si consideramos ángulos dirigidos, el valor de la expresión cambia a –1.)

Definición: Si una línea se traza desde un vértice de un triángulo, el segmento incluido entre el vértice y el lado opuesto es llamado una *ceviana*. Los segmentos *AD, BE* y *CF* en la demostración del teorema de Ceva son las *cevianas* del triángulo.

Ejercicios (Teoremas de Ceva y Menelao)

1. Demostrar por medio de los teoremas vistos que en cualquier triángulo:
   (a) Las medianas son concurrentes.
   (b) Las alturas son concurrentes.
   (c) Las bisectrices de los ángulos interiores son concurrentes.
   (d) Las bisectrices de dos ángulos exteriores y la del tercero interior son concurrentes.
   (e) Las bisectrices de los ángulos exteriores, intersectan los lados opuestos en tres puntos colineales.
   (f) Dos bisectrices internas y la bisectriz externa del tercer ángulo de un triángulo intersectan los lados opuestos en tres puntos colineales.

2. Los seis centros de similitud de tres circunferencias, tomadas por parejas, están por tercias en cuatro líneas rectas.

3. Las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.

4. Las seis bisectrices de los ángulos de un triángulo determinan en los lados opuestos seis puntos, los cuales están por ternas en cuatro líneas rectas.

5. Si P y Q son puntos en AB y AC del triángulo ABC de tal forma que PQ es paralelo a BC, y si BQ y CP se intersectan en O, entonces AO es una mediana.

6. Dado un segmento de línea AB y su punto medio, dibujar por un punto dado P, con regla solamente, una línea paralela a AB.

7. Dadas dos líneas paralelas y el segmento AB en una de ellas, encontrar el punto medio de AB, usando únicamente regla.

8. Dos segmentos iguales AE y AF son marcados sobre los lados AB y AC, respectivamente, del triángulo ABC. Demuestre que la mediana trazada desde A divide a EF en la razón de los lados AC y AB.

9. Sean L, M y N puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, tales que AL, BM y CN son concurrentes en O. Demostrar que

$$\frac{OL}{AL}+\frac{OM}{BM}+\frac{ON}{CN}=1.$$

10. En el ejercicio anterior, demostrar que $\frac{AO}{AL}+\frac{BO}{BM}+\frac{CO}{CN}=2$

11. Si LMN es el triángulo ceviano del punto S para el triángulo ABC, tenemos que:

$$\frac{AS}{AL}=\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{NB}.$$

12. Si P es el punto medio del lado BC del triángulo ABC, y Q y R son puntos cualesquiera en AC y AB de tal forma que BQ y CR se corten en AP, entonces QR es paralelo a BC.

13. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R, respectivamente, las líneas AP, BQ y CR son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el *punto de Gergonne* del triángulo.

14. Si las circunferencias exinscritas del triángulo ABC son tangentes a sus respectivos lados BC, CA y AB en P, Q y R, respectivamente, las líneas AP, BQ y CR son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el *punto de Nagel* del triángulo.

15. Las líneas que unen los puntos de contacto de un excírculo con los lados de un triángulo a los vértices opuestos de los respectivos lados, son concurrentes.

16. Demuestre que si una línea recta pasa por el centroide G del triángulo ABC e intersecta a AB en M y AC en N, entonces en magnitud y en signo:

$$AN\cdot MB+AM\cdot NC=AM\cdot AN.$$

17. Con un punto M del lado BC del triángulo ABC como centro, se trazan circunferencias que pasen por B y C, respectivamente, que cortan a AB y AC en N y P, respectivamente. ¿Para qué posiciones de M las rectas AM, BP y CN son concurrentes? (Sugerencia: considere las intersecciones de BC con las mediatrices de AB y AC.)

18. Si una circunferencia corta a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos P, P'; Q, Q'; R, R', respectivamente, y si AP, BQ y CR son concurrentes, entonces AP', BQ' y CR' son concurrentes.

19. Si P, Q y R son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC de tal forma que AP, BQ y CR son concurrentes y si QR, RP, PQ cortan a BC, CA y AB en P', Q', R', respectivamente, entonces P', Q' y R' son colineales.

20. Demuestra que en el ejercicio anterior AP', BQ' y CR' son concurrentes.

21. Demuestra que los lados del triángulo órtico intersectan a los lados del triángulo dado en tres puntos colineales.

22. Demuestra que el incentro de un triángulo es el punto de Nagel del triángulo medial.

23. Si los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero $ABCD$ son cortados por una línea recta en los puntos P, Q, R y S, respectivamente, entonces:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

24. Sean L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, respectivamente, y sean D, E, F tres puntos cualesquiera en estos lados para los cuales AD, BE y CF son concurrentes. Si P, Q, R son los puntos medios de AD, BE, CF, respectivamente, demostrar que PL, QM, RN son concurrentes.

25. Si en el ejercicio anterior, X, Y, Z, son los puntos medios de EF, FD, DE, respectivamente, demostrar que AX, BY, CZ son concurrentes; y también que LX, MY, NZ son concurrentes.

26. Demuestra que las rectas tangentes al circuncírculo de un triángulo en los vértices, intersectan a los lados opuestos en tres puntos colineales.
    Definición: EL triángulo formado por las tangentes al circuncírculo de un triángulo dado en los vértices de éste es llamado el *triángulo tangencial* del triángulo dado.

27. Sean G, I, M, el centroide, el incentro y el punto de Nagel de un triángulo ABC. Demuestra que G, I y M son colineales y además $2IG = GM$.

Figuras en Perspectiva

Se dice que dos figuras están en *perspectiva*, si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras, son concurrentes. El punto por el cual pasan todas estas rectas es llamado el *centro de perspectiva*.

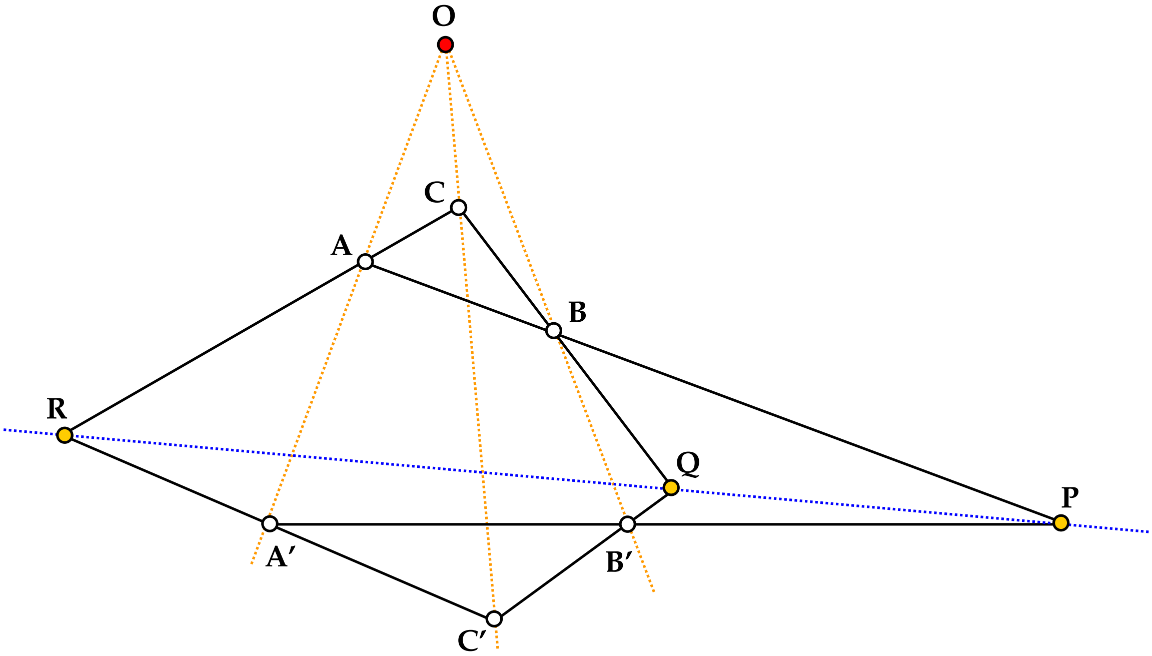
Las figuras homotéticas están en perspectiva, pero las figuras en perspectiva, no necesariamente son homotéticas, puesto que las rectas correspondientes de figuras en perspectiva, no son paralelas en general.

Teorema de Desargues

Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; e inversamente, si los puntos de intersección de lados correspondientes de dos triángulos son colineales, los triángulos están en perspectiva.

En otras palabras, dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, las rectas AA', BB', CC' son concurrentes si y sólo si las intersecciones de las parejas de rectas AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ son colineales.

Demostración.



Sean P, Q y R los puntos de intersección de las rectas AB y $A'B'$; BC y $B'C'$; CA y $C'A'$, respectivamente, y sea O el centro de perspectiva de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

Notemos lo siguiente:

En el triángulo ABO: A', B', P son colineales, por lo que $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{OA'}{A'A}=-1$.

En el triángulo BCO: B', C', Q son colineales, por lo que $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{OB'}{B'B}=-1$.

En el triángulo ACO: A', C', R son colineales, por lo que $\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}=-1$.

Multiplicando estas tres relaciones obtenemos que $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=-1$.

Y aplicando el inverso del teorema de Menelao al triángulo ABC, obtenemos que los puntos P, Q y R son colineales.

Ahora, para demostrar el inverso del Teorema de Desargues, supongamos que los puntos P, Q y R son colineales, y consideremos los triángulos $AA'R$ y $BB'Q$. Estos triángulos están en perspectiva con P como centro de perspectiva. Más aún, O, C y C' son los puntos de intersección de sus pares de lados correspondientes. Entonces estos tres puntos son colineales; es decir, la línea CC' pasa por el punto de intersección de AA' y BB'. Esto establece el inverso.

La recta en que están P, Q y R es el *eje de perspectiva* de los triángulos ABC y $A'B'C'$.

Ejercicios (Teorema de Desargues)

1. ¿Qué línea es el eje de perspectiva de dos triángulos homotéticos?

2. Refiera la solución del siguiente problema al Teorema de Desargues: Dadas dos líneas rectas y un punto que no se encuentre en ambas, con regla solamente, trazar una línea a través de punto dado y del punto de intersección de de las dos líneas dadas sin usar este punto de intersección.

3. Demostrar que si tres triángulos tienen un centro común de perspectiva, los tres ejes de perspectiva son concurrentes.

4. Demostrar que si tres triángulos están en perspectiva por pares y los pares tienen un eje común de perspectiva, los centros de perspectiva son colineales.

5. Demuestra que si las líneas AA', BB', CC' son concurrentes, entonces los seis puntos de intersección de los pares de líneas AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; se encuentran por tercias en cuatro líneas rectas.

6. Verificar que en la configuración del teorema de Desargues, hay diez líneas y diez puntos, tales que tres de ellos están en cada línea, y tres líneas pasan a través de cada punto. Mostrar que en dicha figura hay diez pares de triángulos en perspectiva.

7. Mostrar que siempre es posible trazar un triángulo que esté en perspectiva con un triángulo dado y que sea semejante a otro triángulo dado.

8. Si el incírculo del triángulo ABC toca los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y y Z, respectivamente, y M es el punto de intersección de AX, BY y CZ, muestre que $\frac{AM}{MX}=\frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$; también demuestre que $\frac{AM}{MX}\cdot\frac{BM}{MY}\cdot\frac{CM}{MZ}=\frac{4R}{r}$, donde a, b, c son los lados respectivos de ABC, s es el semiperímetro, y R y r el circunradio e inradio de ABC, respectivamente.

9. Sean O el circuncentro y R el circunradio de un triángulo ABC. Sean L, M y N los puntos de intersección de AO, BO y CO con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que:

$$\frac{1}{AL}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{2}{R}.$$

10. Si las alturas AD, BE, CF, del triángulo ABC intersectan al circuncírculo de ABC también en P, Q, R, demuestre que:

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=4.$$

11. Las paralelas a los lados de un triángulo ABC por un mismo punto M, intersectan a las respectivas medianas en P, Q, R. Demuestre que en magnitud y en signo $\frac{GP}{GA}+\frac{GQ}{GB}+\frac{GR}{GC}=0$.

12. Los circundiámetros AP, BQ, CR de un triángulo ABC intersectan los lados BC, CA, AB, en los puntos K, L, M, respectivamente. Demuestre que:

$$\frac{KP}{AK}+\frac{LQ}{BL}+\frac{MR}{CM}=1.$$

13. Use el teorema de Desargues para demostrar que:
    (a) los lados del triángulo órtico intersectan a los lados del triángulo dado en tres puntos colineales;
    (b) las líneas que unen los puntos de contacto de los lados de un triángulo con el incírculo intersectan los correspondientes lados del triángulo en tres puntos colineales;
    (c) las líneas que unen los vértices de un triángulo a los vértices correspondientes del triángulo tangencia son concurrentes.

    Establezca y demuestre otras proposiciones análogas.

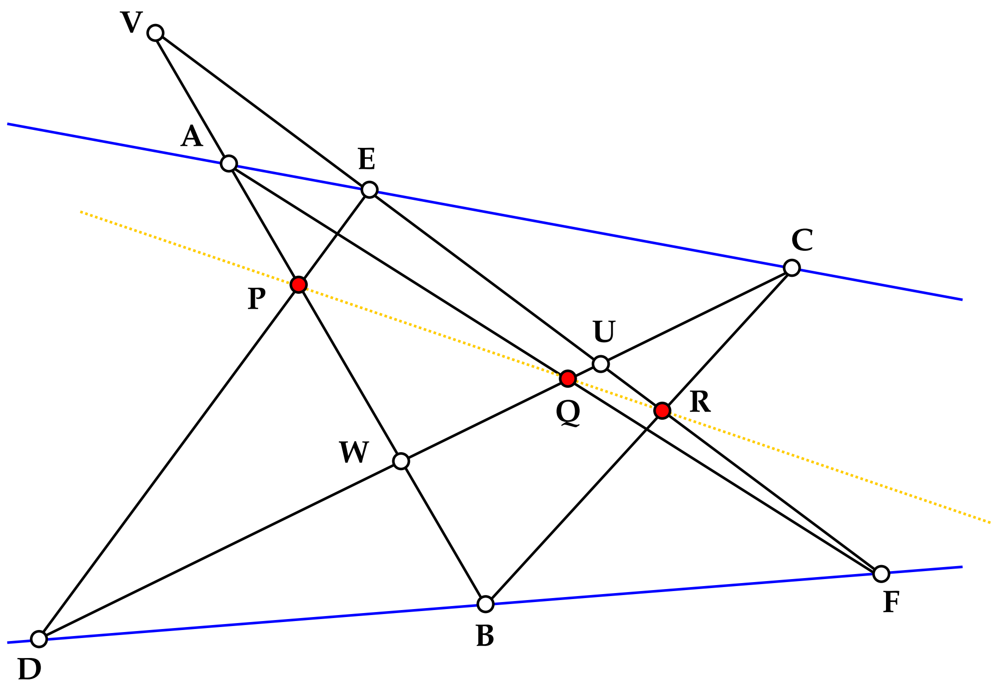
Teorema de Pappus

El teorema de Pappus fue demostrado por primera vez por Pappus de Alejandría, alrededor del año 300 a.C. Un enunciado de este teorema puede ser el siguiente:

Si A, C, E, son tres puntos colineales y B, D, F son otros tres puntos colineales, y si las rectas AB, CD, EF se intersectan con las rectas DE, FA, BC, respectivamente, en los puntos P, Q, R, entonces éstos son colineales.

Este teorema tiene unas características completamente proyectivas, ya que no habla de distancias ni de ángulos, ni tampoco de ningún orden de unos puntos respecto de otros, sólo de puntos que están en rectas (incidencia).

Demostración.



Sea *UVW* el triángulo formado por las intersecciones de las rectas *AB*, *CD* y *EF*, como se muestra en la figura. Entonces vemos que los puntos *P*, *Q* y *R* están sobre los lados de este triángulo.
Ahora fijémonos que las transversales *P, D, E; A, Q, F; B, C, R; A, C, E; B, D, F*, cortan los lados del triángulo *UVW*. Entonces aplicando sucesivamente el teorema de Menelao obtenemos las siguientes relaciones:

$$Si\ P, D, E\ son\ colineales\ entonces\ \frac{VP}{PW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1.$$

$$Si\ A, Q, F\ son\ colineales\ entonces\ \frac{WQ}{QU}\cdot\frac{UF}{FV}\cdot\frac{VA}{AW}=-1.$$

$$Si\ B, C, R\ son\ colineales\ entonces\ \frac{UR}{RV}\cdot\frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}=-1$$

$Si\ A, C, E\ son\ colineales\ entonces\ \frac{VE}{EU} \cdot \frac{UC}{CW} \cdot \frac{WA}{AV} = -1.$

$Si\ B, D, F\ son\ colineales\ entonces\ \frac{UD}{DW} \cdot \frac{WB}{BV} \cdot \frac{VF}{FU} = -1.$

Multiplicando estas cuatro relaciones obtenemos que:

$$\frac{VP}{PW} \cdot \frac{WQ}{QU} \cdot \frac{UR}{RV} = -1,$$

por lo cual *P, Q* y *R* son colineales.

Ejercicios (Teorema de Pappus)

1. Si *A, C, E* son tres puntos que están sobre una recta y *B, D, F* están sobre otra recta, y si las rectas *AB* y *CD* son paralelas a *DE* y *FA*, respectivamente, demuestra que *EF* es paralela a *BC*.

2. Sean *C* y *F* puntos sobre los respectivos lados *AE* y *BD* de un paralelogramo *AEBD*. Si *M* y *N* denotan los puntos de intersección de *CD* con *FA* y de *EF* con *BC*, la línea *MN* intersecará a *DA* en *P* y a *EB* en *Q*. Demuestre que *AP* = *QB*.

Teorema de Pascal

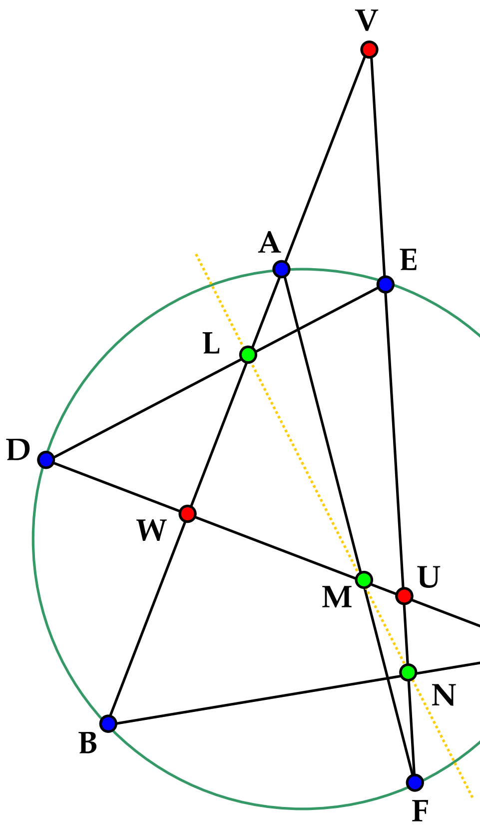
Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales. La línea que contiene estos puntos es llamada la Línea de Pascal del hexágono.

El teorema de Pascal es una generalización directa del Teorema de Pappus, en la cual los puntos se encuentran sobre una sección cónica. Su dual es conocido como el Teorema de Brianchon.

Demostración.

Supongamos que *ABCDEF* es el hexágono y que *L, M, N* son los puntos de intersección de los lados *AB, CD, EF* con *DE, FA, BC*, respectivamente.

Si nos fijamos en el triángulo formado por las rectas *AB, CD, EF* y lo llamamos el triángulo *UVW*, tenemos que *L, D, E; A, M, F; B, C, N*, son transversales a los lados de tal triángulo.



Al aplicar el teorema de Menelao obtenemos las siguientes relaciones en el triángulo UVW:

$$Si\ L, D, E\ son\ colineales\ entonces\ \frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=-1\,.$$

$$Si\ A, M, F\ son\ colineales\ entonces\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FV}=-1\,.$$

$$Si\ B, C, N\ son\ colineales\ entonces\ \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=-1\,.$$

Multiplicando estas tres relaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}&=-\left(\frac{WB}{VB}\cdot\frac{UC}{WC}\cdot\frac{VE}{UE}\cdot\frac{DU}{WD}\cdot\frac{WA}{VA}\cdot\frac{VF}{UF}\right)\\&=-\left(\frac{WB}{WC}\cdot\frac{WA}{WD}\cdot\frac{VE}{VB}\cdot\frac{VF}{VA}\cdot\frac{UC}{UE}\cdot\frac{UD}{UF}\right)\\&=-1\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $BW \cdot WA = CW \cdot WD$, $EV \cdot VF = BV \cdot VA$ y $CU \cdot UD = EU \cdot UF$, aplicando potencia de un punto en la circunferencia.

Luego entonces, por el Teorema de Menelao, si $\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1$, se tiene que *L*, *M* y *N* son colineales.

Ejercicios (Teorema de Pascal)

1. Si cinco de los seis vértices de un hexágono están sobre una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se intersectan en tres puntos colineales, entonces los seis vértices están sobre una misma circunferencia.

2. Para un cuadrilátero cíclico *ABCE* sin dos lados paralelos, las tangentes en *A* y *C*, se intersectan con la línea que une el punto de intersección de *AB* y *CE* con el punto de intersección de *BC* y *EA*.

Teorema de Brianchon

Las rectas que unen los pares de vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una circunferencia son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el Punto de Brianchon del hexágono.

Demostración.

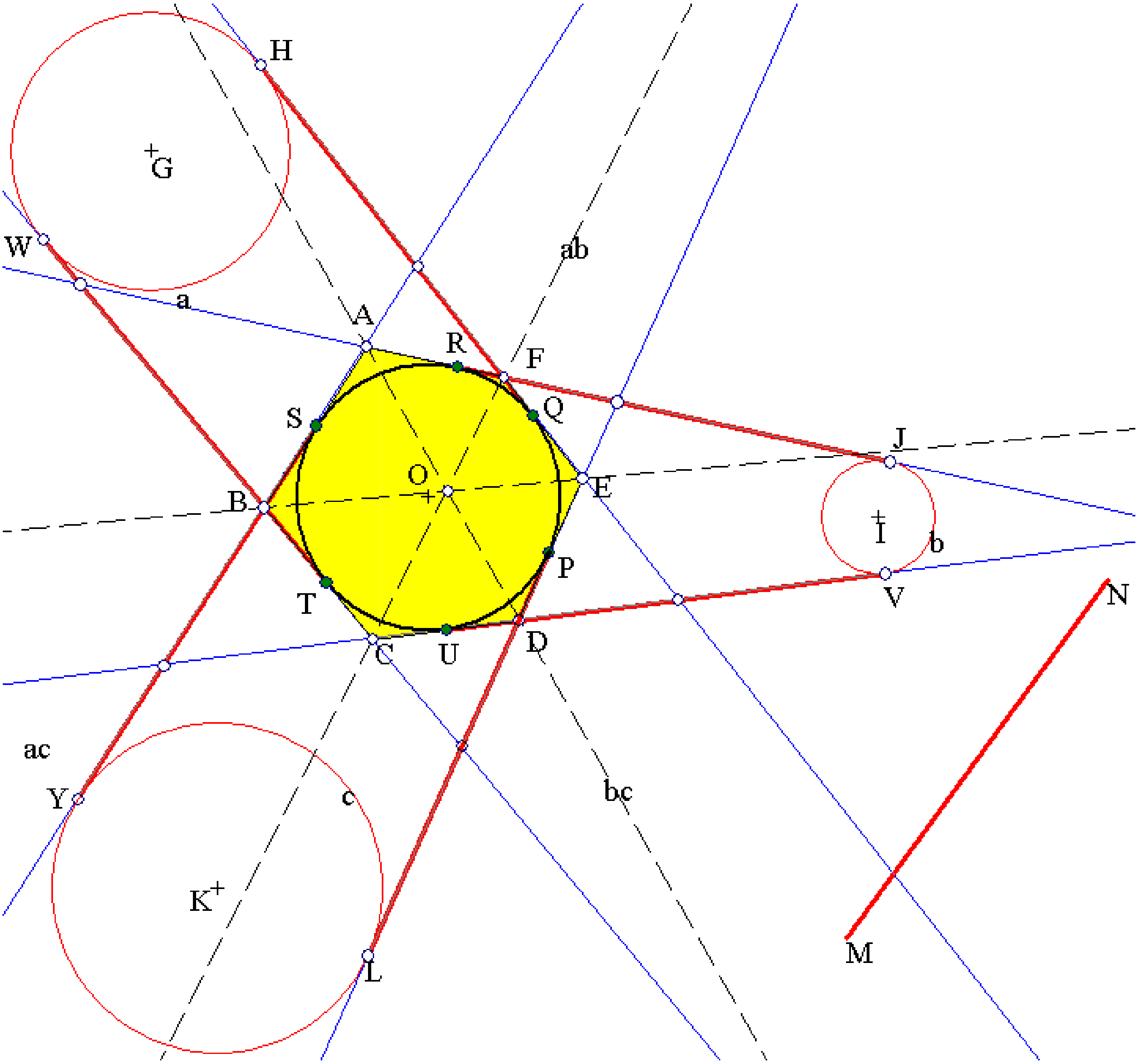
Sean *P, Q, R, S, T, U* los puntos de tangencia de la circunferencia a los lados *DE, EF, FA, AB, BC, CD,* respectivamente, del hexágono *ABCDEF*, como se muestra en la figura.

Para demostrar este teorema tomemos una longitud arbitraria *MN*, y llevémosla a los lados del hexágono desde los puntos de tangencia, tal que: *PL* = *RJ* = *QH* = *MN*, etc.

Dibujemos las circunferencias tangentes *a, b, c* a los lados opuestos del hexágono, y sean (*H, W*), (*J, V*), (*L, Y*) los puntos de tangencia de estas circunferencias, respectivamente.

Uno puede ver fácilmente que las rectas *AD, BE* y *CF* coinciden con los ejes radicales de los pares de circunferencias (*b, c*), (*c, a*) y (*a, b*), respectivamente. Pero sabemos que los ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes.

Por lo tanto, *AD, BE* y *CF* son concurrentes.



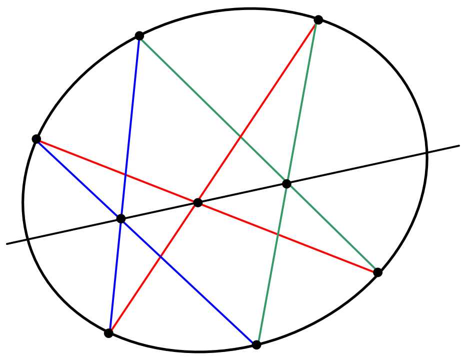
Estos últimos dos teoremas son en general aplicados a cónicas. Veremos los distintos casos límites de cada uno de ellos.

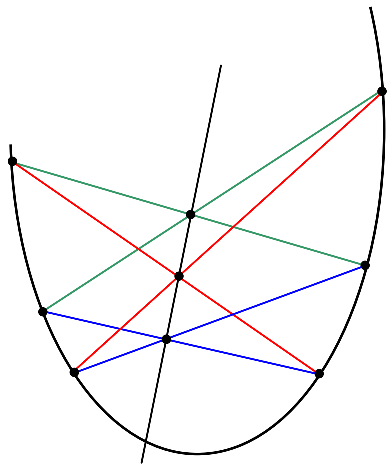
Teorema de Pascal

Si los seis vértices de un hexágono están situados en una cónica y los tres pares de lados opuestos se intersectan, entonces los puntos de intersección son colineales.

A la recta que contiene los tres puntos de intersección se la conoce como *recta de Pascal*.

A continuación vemos cómo se cumple el teorema de Pascal en una elipse y en una parábola.





El teorema de Pascal no acaba aquí. Porque dados seis puntos, no podemos hablar sólo de una recta de Pascal.

A partir de 6 puntos es posible considerar 60 hexágonos diferentes, que por el Teorema de Pascal dan lugar a 60 rectas de Pascal. Estas rectas pasan tres a tres por 20 puntos, llamados *puntos de Steiner*. A su vez, estos 20 puntos están cuatro a cuatro en 15 rectas llamadas *rectas de Plücker*.

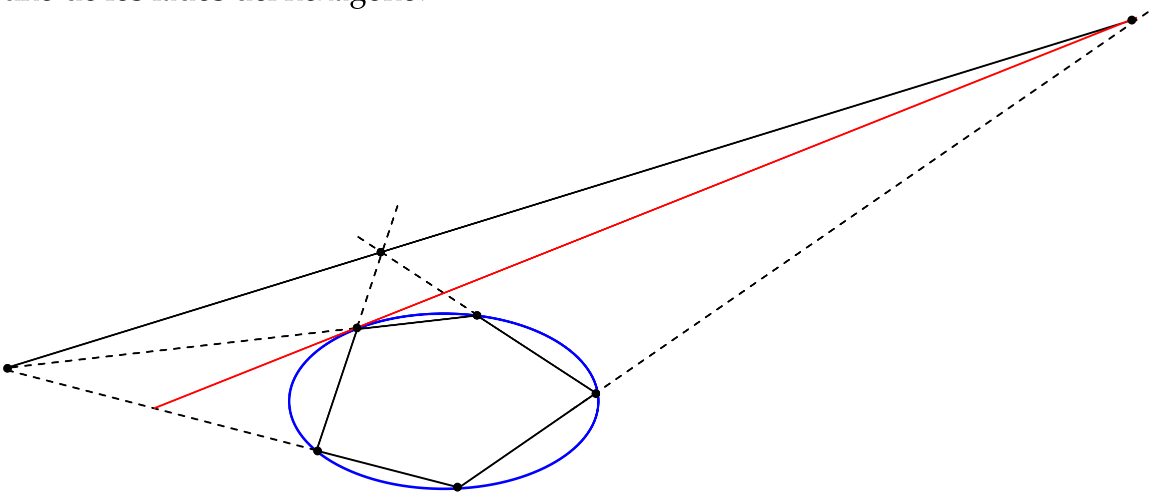
Las rectas de Pascal también se cortan tres a tres en otro conjunto de puntos, llamados *puntos de Kirkman*, de los que hay 60. Asociado a cada punto de Steiner hay tres puntos de Kirkman tales que los cuatro están en una recta, llamada *recta de Cayley*. En total hay 20 rectas de Cayley, que concurren cuatro a cuatro en 15 puntos, llamados puntos de Salmon.

Casos límite

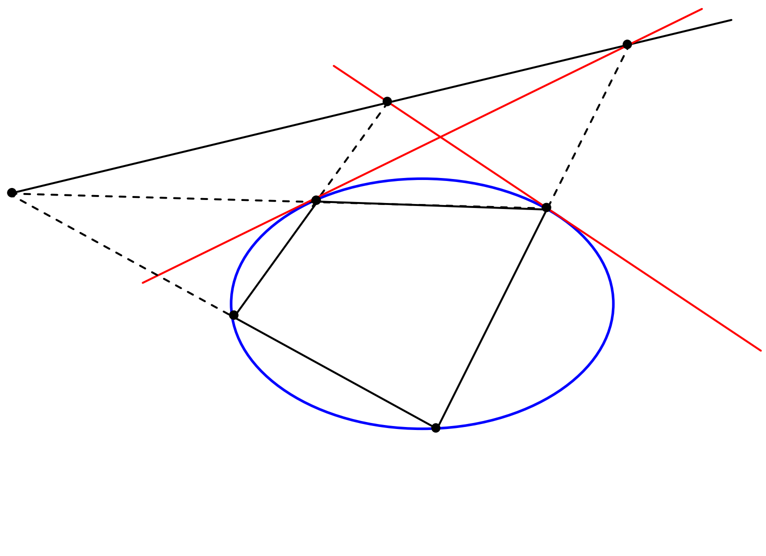
El teorema de Pascal admite casos límite haciendo coincidir dos vértices contiguos del hexágono y sustituyendo el lado correspondiente por la recta tangente por el punto correspondiente.

Por ejemplo,
En todo pentágono inscrito en una cónica, el punto común a la tangente por un vértice y el lado opuesto y los puntos de intersección de los otros lados no consecutivos, son tres puntos alineados.

En la figura, la recta tangente (en color rojo) a uno de los puntos ha sustituido a uno de los lados del hexágono.

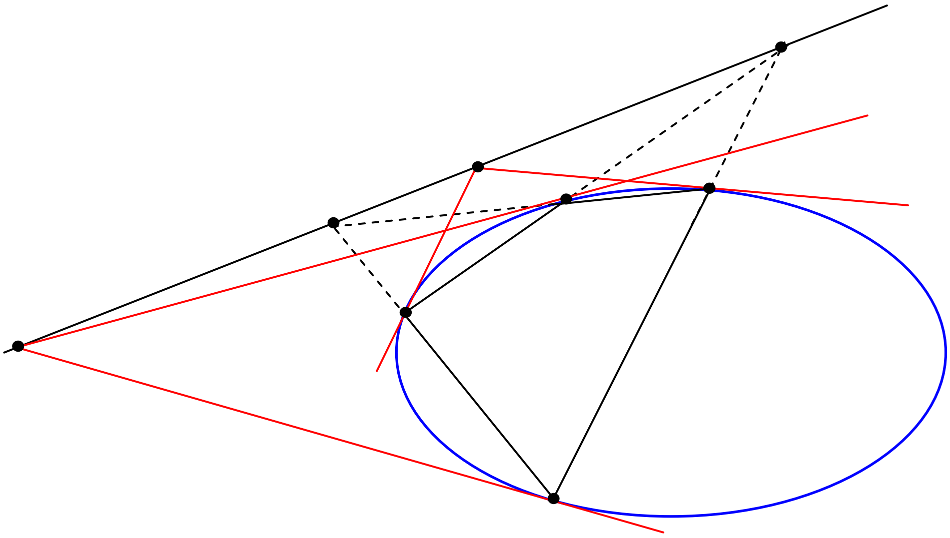


Para un cuadrilátero podemos expresar:
En todo cuadrilátero inscrito en una cónica, si se trazan tangentes en vértices extremos de un lado, el punto de intersección de éste con su opuesto y los puntos de intersección de cada una de las tangentes con el lado que pasa por el punto de contacto de la otra, son tres puntos en línea recta.



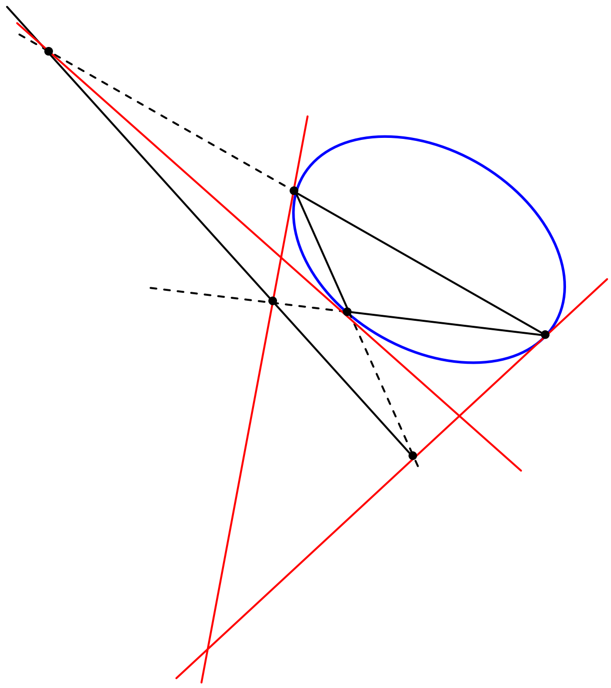
O también:

En todo cuadrilátero inscrito en una cónica, los puntos de intersección de los lados opuestos y los de intersección de tangentes en vértices opuestos son cuatro puntos en línea recta.



Por último, para un triángulo:

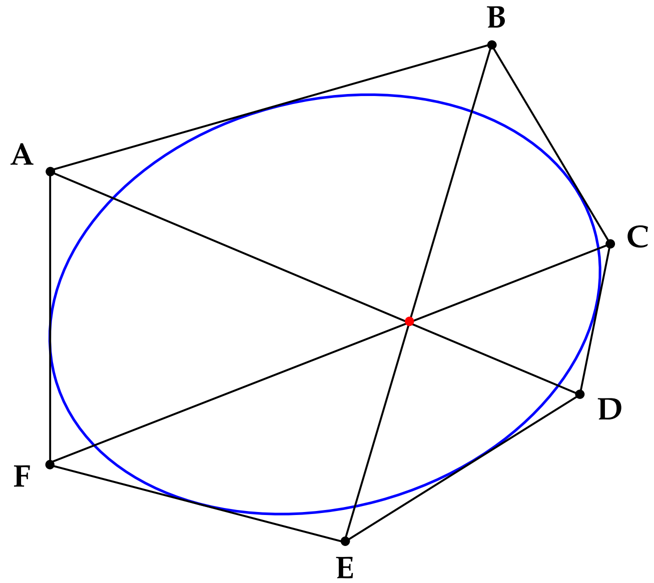
En todo triángulo inscrito en una cónica, los puntos de intersección de los lados con las tangentes trazadas en los vértices opuestos son tres puntos en línea recta.



Teorema de Brianchon

Las diagonales principales de un hexágono circunscrito a una cónica son concurrentes.

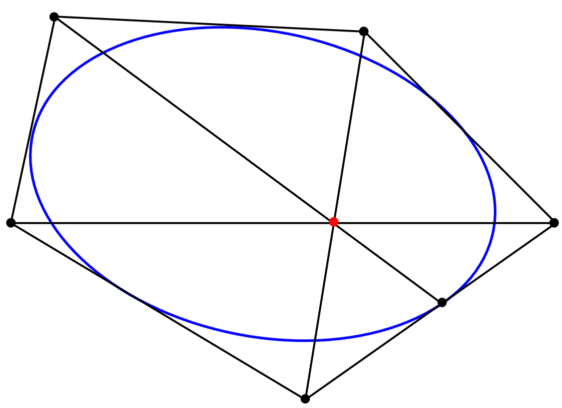
La siguiente figura muestra una elipse inscrita en un hexágono. Al punto común a las tres diagonales, coloreado en rojo, en la figura se le conoce como *punto de Brianchon.*



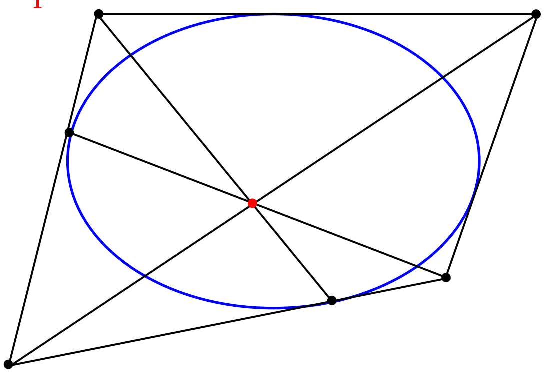
Casos límite

Haciendo coincidir dos lados consecutivos del hexágono en uno solo y sustituyendo el vértice desaparecido por el punto de contacto, obtenemos que

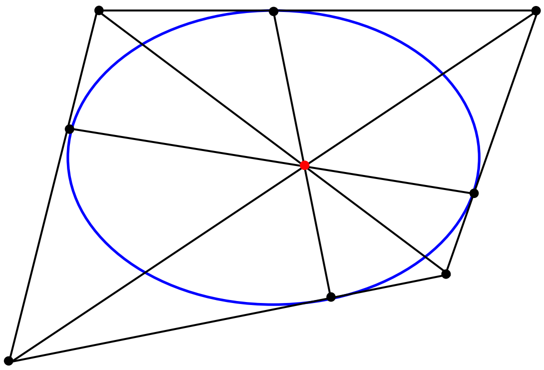
En todo pentágono circunscrito a una cónica, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las diagonales que unen los otros vértices no consecutivos, son tres rectas que concurren en un mismo punto.



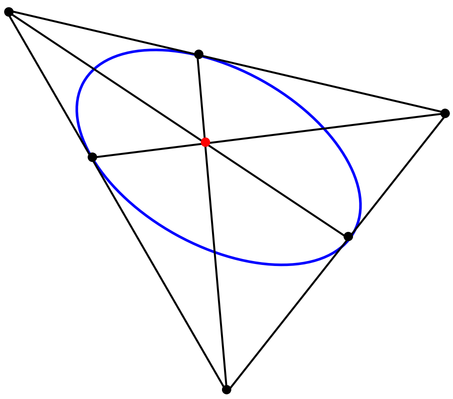
Aplicando el mismo procedimiento, podemos obtener que:
En todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, si se toman los puntos de contacto de dos lados que se cortan en un vértice, la recta de unión de éste con su opuesto y las de unión de los puntos de contacto con los otros dos vértices son tres rectas que concurren en un mismo punto.



O también,
En todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, las dos diagonales y las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos son cuatro rectas que concurren en un punto.



Por último,
En todo triángulo circunscrito a una cónica, las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos son tres rectas que concurren en un punto.



Teorema de Carnot

Algunos puntos especiales son construidos dibujando perpendiculares a los lados de un triángulo. Por ejemplo, el circuncentro puede ser construido dibujando las mediatrices. Es conveniente que un resultado análogo al teorema de Ceva exista para rectas perpendiculares; la prueba del siguiente resultado se dejará para el lector, pudiendo ser demostrada fácilmente por el teorema de Pitágoras. Este teorema lo podemos enunciar como sigue:

Sea ABC un triángulo, y sean P, Q, R tres puntos en el plano. Entonces las rectas que pasan por P, Q, R y son perpendiculares a BC, CA, AB, respectivamente, son concurrentes si y sólo si

$$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0\,.$$

Una consecuencia sorprendente es que las rectas que pasan por P, Q, R y son perpendiculares a BC, CA, AB, respectivamente son concurrentes si y sólo si las rectas que pasan por A, B, C y son perpendiculares a QR, RP, PQ, respectivamente, son concurrentes.

Ejercicios (Teorema de Carnot)

1. Prueba que las rectas AB y CD son perpendiculares si y sólo si:

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

Problemas Propuestos

1. El incírculo de un triángulo ABC toca los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. X es un punto dentro de ABC tal que el incírculo del triángulo XBC toca a BC en D, y toca a CX y XB en Y y Z, respectivamente. Muestra que E, F, Z, Y, son concíclicos.

2. Dado un triángulo ABC, el incírculo y el excírculo sobre BC tocan a BC en X y X', respectivamente, y al lado AC en Y y Y', respectivamente. Demuestra que las rectas XY y $X'Y'$ se intersectan sobre la bisectriz del ángulo A, y la proyección de B sobre esta bisectriz.

3. ABC es un triángulo rectángulo en C. Sobre los lados de este triángulo, se construyen exteriormente los cuadrados $ACKQ$, $BCLP$ y $ABMN$. Sea R la

intersección de la altura desde C con MN. Demuestra que las rectas AP, BQ y CR son concurrentes.

4. Demuestra que si tres cevianas de igual longitud dividen los lados de un triángulo en la misma razón y en el mismo sentido, entonces el triángulo debe ser equilátero.

5. Dado un triángulo ABC, construye puntos A', B', C' tales que ABC', BCA' y CAB' son triángulos isósceles, que satisfacen $\angle BCA' = \angle CBA'$, $\angle CAB' = \angle ACB'$ y $\angle ABC' = \angle BAC'$. Muestra que AA', BB' y CC' son concurrentes.

6. Sean A', B', C' puntos fuera del triángulo ABC tales $A'BC$, $B'CA$ y $C'AB$ son triángulos isósceles semejantes. Demuestra que AA', BB' y CC' son concurrentes.

7. Sean X, Y, Z los centros de los excírculos relativos a los lados BC, CA y AB, de un triángulo ABC, respectivamente. Muestra que las perpendiculares desde X, Y y Z a los lados BC, CA y AB, respectivamente, son concurrentes.

8. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sean M y N puntos sobre los lados AB y CD, respectivamente. Las rectas AN y DM se cortan en P, las rectas AC y BD se cortan en Q, las rectas CM y BN se cortan en R. Demuestra que P, Q y R son colineales.

9. Considera un triángulo ABC. Definimos la recta L_A como sigue: Sea D el pie de la altura desde A. La circunferencia de diámetro AD corta a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Entonces L_A es la recta perpendicular a MN que pasa por A. Análogamente definimos L_B y L_C. Demuestra que L_A, L_B y L_C son concurrentes.

10. En un triángulo ABC, sean P y P' puntos sobre el segmento BC, Q sobre el segmento CA y R sobre el segmento AB, de tal forma que:

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}.$$

Sea G el centroide de ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demuestra que P, G y K son colineales.

11. Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y AC, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del

lado BC, corta a AC en N. Sea L el punto sobre AC tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K. Demuestra que $KA = NC$.

12. Sea ABC un triángulo y D, E, F puntos sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente, tales que las cevianas AD, BE, CF son concurrentes. Muestra que si M, N, P son puntos sobre EF, FD, DE, respectivamente, entonces las rectas AM, BN, CP son concurrentes si y sólo si las rectas DM, EN, FP son concurrentes.

13. Los tres cuadrados ACC_1A'', $ABB_1^{'}A^{'}$, $BCDE$ son construidos externamente sobre los lados de un triángulo ABC. Sea P el centro de $BCDE$. Demuestra que las rectas $A'C$, $A''B$, PA son concurrentes.

14. Sea ABC un triángulo y D, E, F los puntos donde el incírculo toca a los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sean M, N, P puntos sobre los segmentos EF, FD, DE, respectivamente. Muestra que las rectas AM, BN, CP se intersectan si y sólo si las rectas DM, EN, FP se intersectan.

15. Dado un triángulo no rectángulo ni isósceles ABC inscrito en una circunferencia de centro O, sean A', B' y C' los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. El punto A'' se encuentra sobre la recta OA' tal que los triángulos OAA' y $OA''A$ son semejantes. Los puntos B'' y C'' se encuentran sobre las rectas OB' y OC', respectivamente, y se definen similarmente. Demuestra que las rectas AA'', BB'' y CC'' son concurrentes.

16. Dado un triángulo ABC y puntos X, Y, Z tales que $\angle ABZ = \angle XBC$, $\angle BCX = \angle YCA$ y $\angle CAY = \angle ZAB$, prueba que AX, BY y CZ son concurrentes.

17. Sean A, B, C, D, E, F, P siete puntos sobre una circunferencia. Muestra que AD, BE, CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{\operatorname{sen}\angle APB \operatorname{sen}\angle CPD \operatorname{sen}\angle EPF}{\operatorname{sen}\angle BPC \operatorname{sen}\angle DPE \operatorname{sen}\angle FPA} = -1,$$

usando ángulos dirigidos módulo 2π.

18. Sean A, B, C tres puntos sobre una recta. Escoge un punto D en el plano y un punto E sobre BD. Traza la recta que pasa por los puntos de intersección de AE con CD y CE con AD. Muestra que esta recta corta a AC en un punto P que depende sólo de A, B y C.

19. Sean A, B, C tres puntos colineales y D, E, F otros tres puntos colineales. Sea G la intersección de BE y CF, H la intersección de AD y CF, I la intersección de AD y CE. Si $AI = HD$ y $CH = GF$, muestra que $BI = GE$.

20. Sea ABC un triangulo y P un punto en su interior, tal que no yace en ninguna de las medianas de ABC. Sean A', B', C' los puntos de intersección de PA con BC, PB con CA, PC con AB, respectivamente, y sean A'', B'', C'' las intersecciones de $B'C'$ con BC, $C'A'$ con CA, $A'B'$ con AB, respectivamente. Demuestra que los puntos medios de $A'A''$, $B'B''$ y $C'C''$ son colineales.

21. Sea ABC un triángulo, Por el pie A' de la altura por A, se trazan las perpendiculares a los lados AB y CA que cortan a las perpendiculares a BC desde B y C en P y Q. Demostrar que los puntos P y Q están alineados con el ortocentro H del triángulo ABC.

22. Sea ABC un triángulo, y construyamos cuadrados $ABB'A''$, $BCC'B''$, $CAA'C''$ externamente al triángulo. Demuestra que las mediatrices de los segmentos $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ son concurrentes.

23. Considera un triángulo ABC. Sean A', B', C' las proyecciones desde los vértices A, B, C, sobre una recta l, respectivamente. Las proyecciones desde A' a BC, desde B' a CA, y desde C' a AB, son concurrentes. El punto de concurrencia se conoce como el *ortopolo* de la recta l con respecto al triángulo ABC.

24. Las perpendiculares por P a las cevianas AP, BP y CP, de un triángulo ABC, intersectan a los lados BC, CA, AB, respectivamente, en tres puntos colineales. Estos puntos yacen sobre una recta llamada la *ortopolar* de P con respecto a ABC.

25. Sea ABC un triángulo. Se construyen triángulos isósceles DBC, AEC, ABF, externamente a ABC (con BC, CA, AB como sus respectivas bases). Demuestra que las rectas que pasan por A, B, C y son perpendiculares a EF, FD, DE son concurrentes.

26. Sea ABC un triángulo, y D, E, F los puntos donde el incírculo toca los lados BC, CA, AB, respectivamente. La paralela a AB por E corta a DF en Q, y la paralela a AB por D corta a EF en T. Muestra que las rectas CF, DE, QT son concurrentes.

27. El incírculo del triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Sea P cualquier punto interior al triángulo ABC, y sean X, Y, Z los puntos donde los segmentos PA, PB, PC cortan al incírculo, respectivamente. Prueba que las rectas DX, EY, CZ son concurrentes.